UFES

Talles Oliveira de Souza Alves

Relaxação Lagrangiana aplicada ao problema de Tabela-Horário de universidades

Alegre-ES

2018

UFES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde

Departamento de Computação

TALLES OLIVEIRA DE SOUZA ALVES

RELAXAÇÃO LAGRANGIANA APLICADA AO PROBLEMA DE TABELA-HORÁRIO DE UNIVERSIDADES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Computação do Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Ciência da Computação.

M.Sc. Edmar Hell Kampke
Orientador

D.Sc. Geraldo Regis Mauri

M.Sc. Dayan de Castro Bissoli

ALEGRE-ES
2018

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais por terem tornado esse sonho possível e por toda a força e incentivo que me foram dados durante toda a graduação. Agradeço também aos demais familiares por sempre terem me apoiado.

A todos os professores da graduação pelos ensinamentos, tornando possível minha chegada até aqui.

Ao meu orientador, Edmar, pelas suas dicas, suporte e paciência durante esse um ano e meio da realização desse trabalho. Agradeço também pela sua amizade.

Ao professor Geraldo pelas dicas e pelo esclarecimento de dúvidas durante a realização desse trabalho. Agradeço também por ter aceitado fazer parte da banca examinadora.

Ao professor Dayan por ter aceitado o convite para participar da banca examinadora.

A professora Maria Claudia Silva Boeres por permitir a utilização de um computador do Labotim para realizar os testes deste trabalho.

Aos amigos que fiz durante esses anos de faculdade pelos momentos de alegria e descontração.

Aos meus amigos Cássio, Emerson, Otto, Renan e Romerson pelo companheirismo e por terem se tornado verdadeiros irmãos para mim.

Resumo

O problema de tabela-horário de universidades consiste em alocar um conjunto de aulas em salas e horários pré-determinados, respeitando um conjunto de restrições. Esse problema vem ganhando notoriedade com a ajuda de eventos como o *International Timetabling Competition* - ITC. Existem diversas formulações para o problema. Neste trabalho é utilizada a formulação da segunda edição do ITC, realizada em 2007 (ITC-2007). Para solucionar o problema, foi utilizado o método Relaxação Lagrangiana. O método proposto foi testado utilizando as instâncias disponibilizadas no ITC-2007 e os resultados obtidos foram analisados após uma sequência de testes. Com a análise dos resultados foi possível concluir que a aplicação do método proposto não trouxe resultados satisfatórios para o problema abordado.

Palavras–Chave: Tabela-horário para universidades, Algoritmo de Subgradientes, Relaxação Lagrangiana, ITC-2007.

Abstract

The University Timetabling Problem consists of allocating a set of lectures to rooms and predetermined timeslots, complying with a set of constraints. The notoriety of this problem has been increasing with the help of events such as the *International Timetabling Competition* - ITC. There are many formulations to the problem. The chosen formulation for this course conclusion paper is the one used on ITC‘s second edition, which took place in 2007 (ITC-2007). The Lagrangean Relaxation optimization method was used to solve the problem. The proposed method was tested on the instances that were made available on ITC-2007 and the results obtained were analyzed after a test sequence. after analyzing the results one can conclude that the proposed method did not yield good results.

Keywords: University Timetabling, Subgradient Method, Lagrangean Relaxation, ITC-2007.

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 O problema e sua importância 2

1.2 A formulação CB-CTT 3

1.3 Objetivos deste trabalho 5

1.3.1 Objetivos gerais 5

1.3.2 Objetivos específicos 5

1.4 Organização do texto 6

2 Revisão de literatura **7**

3 Metodologia **10**

3.1 Modelagem matemática 10

3.1.1 Elementos do modelo 10

3.1.2 Função objetivo 12

3.1.3 Restrições 13

3.2 Relaxação Lagrangiana 15

3.3 Aplicação da Relaxação Lagrangiana no PTHU 18

3.3.1 Heurística de viabilização 19

3.3.2 Relaxação Lagrangiana para a formulação CB-CTT do PTHU 20

4 Resultados obtidos **24**

4.1 Ambiente de testes e Desenvolvimento 24

4.2 Parâmetros utilizados 25
4.3 RL_{Curta} 27
4.4 RL_{Longa} 30
4.5 Comparativo entre RL_{Curta} e RL_{Longa} 32

5 Conclusões **36**

Referências Bibliográficas **37**

Lista de Tabelas

4.1 Configuração do ambiente de testes 25
4.2 Limitantes superiores 26
4.3 Critérios de parada 26
4.4 Resultados da RL_{Curta} 28
4.5 Diferença relativa dos limitantes inferiores dos testes RL_{Curta} 29
4.6 Resultados da RL_{Longa} 30
4.7 Diferença relativa dos limitantes inferiores dos testes RL_{Longa} 32
4.8 Percentual de melhora dos resultados da RL_{Longa} em relação à RL_{Curta} 34

Lista de Algoritmos

1 Algoritmo de Subgradientes 17

2 Heurística de viabilização 20

3 Relaxação Lagrangiana com limitante superior fixo 21

4 Relaxação Lagrangiana com heurística de viabilização 23

Capítulo 1

Introdução

O sequenciamento, ou agendamento, de atividades é uma tarefa comum no dia-a-dia de diversas instituições, como exemplo: indústrias, consultórios médicos e escolas. Em alguns casos essa tarefa é de suma importância para o bom funcionamento da instituição. É interessante, portanto, que haja métodos para tornar essa tarefa mais eficiente. Em otimização combinatória, o problema de agendamento (*scheduling*) é bastante estudado, em especial, os Problemas de Tabela-Horário (PTH). O objetivo do PTH é modelar o problema através de uma função matemática e tentar minimizá-la (ou maximizá-la), obedecendo às restrições impostas. Em problemas relativamente pequenos, o agendamento pode ser feito manualmente de maneira satisfatória, mas em problemas maiores, com um número elevado de restrições, como é o caso de instituições de ensino, o agendamento manual normalmente não é eficiente. Existem portanto, vários estudos na área de PTH educacional buscando maneiras de otimizar essa tarefa. Segundo Schaerf (1999), na área educacional, os PTH se diferem de acordo com o tipo de instituição e restrições envolvidas, podendo ser classificados em três categorias principais: PTH de escolas, PTH de universidades (PTHU) e PTH de exames. O PTHU consiste na tarefa de alocar um conjunto de aulas em um número limitado de horários e salas, obedecendo um conjunto de restrições (Lewis 2007).

1.1 O problema e sua importância

O PTHU é um problema de complexidade elevada, e por isso, se destaca dentre os PTH na área educacional. De acordo com Lewis (2007), as formulações normalmente variam para cada universidade, uma vez que cada uma tem suas próprias necessidades que precisam ser satisfeitas. Schaerf (1999) afirma que o PTHU pode ser classificado como NP-Completo para a maioria das formulações. Segundo Bettinelli et al. (2015), nos anos recentes tem havido um interesse crescente na automatização do PTHU. Parte desse interesse está ligado a eventos organizados nessa área, principalmente o PATAT - *The International Series of Conferences on the Practice and Theory of Automated Timetabling*. Para promover o estudo de técnicas para os PTH educacional, foram organizadas pelo PATAT nos anos de 2002, 2007 e 2011, uma competição denominada *International Timetabling Competition* (ITC). Em sua segunda edição (2007), o ITC trouxe algumas inovações em relação à sua primeira edição (2002). Como descrito por Di Gaspero; McCollum; Schaerf (2007), a principal inovação foi a distinção do PTHU em três categorias diferentes: *Examination Timetabling*, *Post-Enrolment-based Course Timetabling* (PE-CTT) e *Curriculum-Based Course Timetabling* (CB-CTT). Cada categoria possui sua própria formulação, e cada competidor podia competir nas 3 categorias. A Segunda formulação (PE-CTT) e a terceira formulação (CB-CTT) tratam da alocação de aulas, mas como destaca Bettinelli et al. (2015), no PE-CTT a tabela-horário é definida levando em consideração as solicitações de matrículas dos estudantes, já no CB-CTT um currículo define previamente os conjuntos de disciplinas que os alunos deveriam se matricular. Um currículo pode ser definido como um conjunto de disciplinas que possuem alunos em comum.

Apesar de ser desejável encontrar uma solução que todas as restrições sejam satisfeitas, em casos reais isso é extremamente difícil. Dessa forma, de acordo com Santos; Souza (2007), as restrições da formulação do problema são classificadas de acordo com sua importância. Normalmente as restrições são classificadas em dois tipos:

- Restrições fortes: São restrições com maior prioridade, e seu atendimento é obrigatório. Caso não sejam atendidas, a solução torna-se inviável.
- Restrições fracas: São restrições em que o atendimento é desejado, porém não é obrigatório.

São utilizadas para descrever a qualidade de uma solução.

Devido a importância apresentada do problema, esse trabalho propõe a utilização de um método denominado Relaxação Lagrangiana, no intuito de observar o comportamento do método e encontrar limitantes para o problema. A Relaxação Lagrangiana foi escolhida por ser um método ainda não utilizado para resolver a formulação utilizada neste trabalho. Para a realização desse trabalho, utiliza-se a formulação CB-CTT do ITC-2007 (descrita no item 1.2) por ser a última edição do evento a abordar o PTHU e por mais se aproximar da realidade de grande parte das universidades brasileiras.

1.2 A formulação CB-CTT

A formulação CB-CTT do ITC-2007 é descrita em Di Gaspero; McCollum; Schaerf (2007). As instâncias utilizadas na competição são baseadas em casos reais da Universidade de Udine, na Itália. Dessa forma, cada instância é composta pelo seguinte conjunto de informações:

- **Dias, Períodos e Horários**: Cada dia possui um número fixo de períodos, que é o mesmo para todos os dias. Um horário é um par composto por um dia e um período. O número total de horários disponíveis para alocação é obtido pela multiplicação do número de dias pelo número de períodos no dia.
- **Disciplinas e Professores**: Cada disciplina possui um número fixo de aulas que devem ser alocadas em horários distintos, um professor que a leciona e o número de alunos que a assistem. Para cada disciplina há uma quantidade mínima de dias distintos em que suas aulas devem ser alocadas.
- **Salas**: Cada sala possui uma capacidade definida pelo número de assentos disponíveis.
- **Currículos**: Consiste em um conjunto de disciplinas que possuem alunos em comum.
- **Indisponibilidades**: Horários em que uma determinada disciplina não pode ser lecionada.

A terceira formulação do ITC-2007 define oito restrições no total, sendo quatro restrições fortes e

quatro restrições fracas. São elas:

- Restrições fortes:
  - **Aulas**: Todas as aulas de uma disciplina devem ser alocadas, e em horários diferentes. Uma violação ocorre se uma aula não é alocada.
  - **Ocupação de sala**: Duas aulas não podem ser alocadas em uma mesma sala, no mesmo horário. Cada aula extra em uma mesma sala, no mesmo horário, conta como uma violação.
  - **Conflitos**: Aulas de disciplinas de um mesmo currículo, ou ministradas pelo mesmo professor devem ser alocadas em horários diferentes. Duas aulas conflitantes no mesmo horário representam uma violação.
  - **Disponibilidade**: Se o professor de uma disciplina não está disponível para lecioná-la em determinado horário, nenhuma aula dessa disciplina pode ser alocada nesse horário. Cada aula alocada em um período não disponível para a disciplina conta como uma violação.
- Restrições fracas:
  - **Capacidade de sala**: Para cada disciplina, o número de alunos que está matriculado na disciplina deve ser menor ou igual ao número de assentos disponíveis em todas as salas que ocorrem aulas dessa disciplina. Cada aluno acima da capacidade conta como uma violação.
  - **Dias mínimos de trabalho**: Todas as aulas de cada disciplina devem ser espalhadas em um número mínimo de dias. Cada dia abaixo do número mínimo de dias conta como uma violação.
  - **Aulas isoladas**: Aulas de disciplinas de um mesmo currículo devem ser adjacentes uma à outra. Para cada currículo, uma violação é contada quando há uma aula não adjacente à nenhuma outra aula no mesmo dia.

- **Estabilidade de sala**: Todas as aulas de uma disciplina devem acontecer na mesma sala. Cada sala distinta usada para aulas dessa disciplina, além da primeira, contam como uma violação.

1.3 Objetivos deste trabalho

Nesta seção encontram-se os objetivos gerais e específicos deste trabalho.

1.3.1 Objetivos gerais

Verificar o comportamento do método Relaxação Lagrangiana para o problema Tabela-Horário de Universidades, com o intuito de analisar seu desempenho em diversas perspectivas.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Estudar a modelagem matemática da formulação CB-CTT do ITC-2007 proposta em Burke et al. (2010).
2. Estudar a Relaxação Lagrangiana.
3. Implementar o método proposto.
4. Aplicar a Relaxação Lagrangiana para solucionar o PTHU utilizando as instâncias disponibilizadas no ITC-2007.
5. Avaliar o desempenho obtido pelo método utilizando métricas computacionais.
6. Analisar os resultados encontrados.

1.4 Organização do texto

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2 é realizada a revisão de literatura, onde são discutidos trabalhos publicados anteriormente sobre PTH's. No capítulo 3 é apresentada a metodologia utilizada para a solução do problema, incluindo a modelagem matemática e os métodos utilizados. No capítulo 4 encontram-se os resultados obtidos ao aplicar a metodologia apresentada. No capítulo 5 encontram-se as conclusões sobre os resultados obtidos.

Capítulo 2

Revisão de literatura

Os estudos sobre automação do processo de criação de tabelas-horário já existem há décadas, e tiveram como pioneiro Gotlieb (1962). À partir de então, diversas abordagens têm sido propostas para solucionar os Problemas de Tabela-Horário, como por exemplo a utilização de meta-heurísticas. Apesar de não garantirem uma solução ótima, meta-heurísticas são uma boa escolha para problemas muito grandes, uma vez que são capazes de encontrar soluções de qualidade em um tempo razoável como descrito em Ciscon; Alvarenga (2005).

Dentre os finalistas do ITC-2007 houveram abordagens de solução baseadas em meta-heurísticas. Müller (2009), vencedor do ITC-2007 na formulação CB-CTT, utilizou um *solver* que contém um *framework* baseado em busca local (CPSolver). O algoritmo de busca utiliza *Iterative Forward Search* (IFS) para construir uma solução inicial viável e *Hill Climbing* (HC) para encontrar o ótimo local. Uma vez que a solução atual não pode mais ser melhorada, utiliza-se uma versão modificada da técnica *Great Deluge* (GD), em que permite-se algumas oscilações dos limites impostos sobre o valor da solução. O algoritmo também permite, de forma opcional, a utilização do *Simulated Annealing* (SA) entre as oscilações do GD.

Lü; Hao (2008), também finalistas do ITC-2007, que conquistaram o segundo lugar na formulação CB-CTT da competição, utilizaram uma heurística híbrida. A heurística proposta combina elementos da Busca Tabu e do *Iterated Local Search* (ILS) para criar uma Busca Tabu Adaptativa

(BTA), na qual utiliza-se a perturbação do ILS para garantir um balanceamento entre intensificação e diversificação. O algoritmo utiliza também uma Cadeia de Kempe dupla em sua estrutura de vizinhança.

Após o ITC-2007, outros trabalhos passaram a utilizar as formulações nele apresentadas. Rocha (2013) aplicou o *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP) na formulação CB-CTT do ITC-2007. A solução apresentada permite a utilização de HC ou SA na etapa de busca local. Para aprimorar a qualidade das soluções é utilizado o *Path-Relinking*.

Segatto et al. (2015) também se baseou na formulação CB-CTT do ITC-2007 para incrementar o trabalho de Rocha (2013), fixando o SA como método de busca local e adicionando um novo movimento à estrutura de vizinhança nele utilizada, a Cadeia de Kempe.

Além das meta-heutísticas, uma outra abordagem de solução para os PTH são os métodos exatos, que, ao contrário de métodos heurísticos, garantem a solução ótima. Kristiansen; Sørensen; Stidsen (2015) propuseram um modelo de *Mixed-Integer Linear Programming* (MIP) para o PTH de escolas, que é resolvido por um *solver* comercial. O modelo MIP criado utiliza o XHSTT (*eXtended Markup Language for High School TimeTabling*), um formato baseado em XML, para representar instâncias e soluções para problemas de tabela-horário de escolas. O primeiro passo do método proposto consiste em criar um sub-modelo MIP apenas com as restrições fortes e enviá-lo ao *solver*. Ao terminar o primeiro passo, adiciona-se as restrições fracas ao sub-modelo, que então é enviado novamente ao *solver* com os valores encontrados no passo anterior. Segundo os autores, o método proposto é o primeiro método exato capaz de lidar com instâncias arbitrárias no formato XHSTT.

Além das meta-heurísticas e dos métodos exatos, existem as *math-heuristics*, que consistem na mistura dessas duas abordagens. Um exemplo dessa abordagem pode ser observado em Gunawan; Ng; Poh (2012), que propõe um método híbrido que consiste na aplicação de dois algoritmos sequencialmente para resolver os sub-problemas de atribuição de professores e agendamento de aulas de uma universidade da Indonésia. No primeiro algoritmo utiliza-se uma abordagem baseada na Relaxação Lagrangiana para encontrar uma solução inicial viável. No segundo algoritmo utiliza-se o SA para melhorar a solução obtida no primeiro algoritmo.

A relaxação Lagrangiana é um método ainda não usado para solucionar a formulação CB-CTT do ITC-2007, porém já foi usada em outros trabalhos para, por exemplo, o problema de agendamento de trilhos (Brännlund et al. 1998), o problema de roteamento de veículos com janela de horário (Kohl; Madsen 1997) e também para solucionar os sub-problemas de atribuição de professores e agendamento de aulas (Gunawan; Ng; Poh 2012).

Para aplicar a Relaxação Lagrangiana à formulação CB-CTT é necessária a definição de um modelo matemático. Uma maneira comum de se formular um modelo matemático para PTH's é utilizando conceitos de Grafos, como por exemplo *coloração*. Burke et al. (2010) se baseia no conceito de *partição em cliques* para propor um modelo matemático para o CB-CTT.

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo são apresentados o modelo matemático que será utilizado na Relaxação Lagrangiana, que por sua vez é apresentada logo em seguida. Por fim, a heurística de viabilização é apresentada.

3.1 Modelagem matemática

O modelo matemático utilizado para representar o PTHU abordado neste trabalho, baseado na formulação CB-CTT, foi proposto por Burke et al. (2010). Nesta seção o modelo será descrito resumidamente.

3.1.1 Elementos do modelo

No modelo, cada instância é formada por sete conjuntos (que representam os elementos descritos no item 1.2) e oito mapeamentos entre esses conjuntos:

- *C, U, T, R, D, P* representam, respectivamente, conjuntos de disciplinas, currículos, professores, salas, dias e períodos.
- $\tilde{U}^u$ é o conjunto não vazio de disciplinas no currículo u.

- N é um subconjunto de $C \times P$, representando combinações disciplina-período proibidas.
- E^c é o número de aulas que a disciplina c tem na semana.
- S^c é número de estudantes matriculados na disciplina c.
- Q^c é o número mínimo de dias distintos da semana que a disciplina c deve ter aulas.
- $\tilde{T}^t$ é um subconjunto de disciplinas de C lecionadas pelo professor t.
- A^r é a capacidade da sala r.
- $\tilde{D}^d$ é um subconjunto de P que corresponde aos períodos do dia d.
- W é um vetor de pesos não negativos (W^{RCap}, W^{TSpr}, W^{TCom}, W^{RStb}) para as violações das restrições fracas descritas no item 1.2, sendo que:
  - W^{RCap} é o peso para violações da restrição de capacidade de sala.
  - W^{TSpr} é o peso para violações da restrição de dias mínimos de trabalho.
  - W^{TCom} é o peso para violações da restrição de aulas isoladas.
  - W^{RStb} é o peso para violações da restrição de estabilidade de sala.

  Os valores de W^{RCap}, W^{TSpr}, W^{TCom} e W^{RStb} são respectivamente: 1, 5, 2 e 1.

Cada solução possui uma função objetivo (f) associada e o valor dessa função representa a qualidade da solução. A função f consiste na soma ponderada da quantidade de violações das restrições fracas e, em alto nível, pode ser representada por:

$$f = W^{RCap}P^{RCap} + W^{TSpr}P^{TSpr} + W^{TCom}P^{TCom} + W^{RStb}P^{RStb}$$

sendo que:

- P^{RCap} é o número de violações à restrição de capacidade de sala.
- P^{TSpr} é o número de violações à restrição de dias mínimos de trabalho.

- P^{TCom} é o número de violações à restrição de aulas isoladas.
- P^{RStb} é o número de violações à restrição de estabilidade de sala.

Para a formulação CB-CTT o objetivo é minimizar o valor dessa função. A função objetivo é detalhada na subseção seguinte.

3.1.2 Função objetivo

O modelo é composto por cinco tipos de variáveis de decisão: uma variável independente (x) e 4 variáveis dependentes (v, q, z e y), cujos valores são obtidos a partir dos valores de x. As variáveis de decisão são descritas da seguinte maneira:

- x são variáveis de decisão binárias indexadas com períodos, salas e disciplinas. Em qualquer solução viável, $x_{p,r,c}$ é 1 se, e somente se uma aula da disciplina c é lecionada na sala r no período p.
- v são variáveis de decisão binárias indexadas com disciplinas e dias. Em qualquer solução viável, $v_{d,c}$ é 1 se, e somente se pelo menos uma aula da disciplina c é lecionada no dia d.
- q são variáveis de decisão inteiras indexadas com disciplinas, cujos valores têm como limite inferior zero e como limite superior o número de dias de aula na semana. Em qualquer solução viável, q_c é o número de dias de aula que a disciplina c está abaixo do recomendado (Q^c).
- z são variáveis de decisão binárias indexadas com currículos, dias e um conjunto indexado Z de períodos. O conjunto Z possui N_{pd} elementos, em que N_{pd} é o número de períodos por dia. Em qualquer solução viável, o valor de $z_{u,d,s}$ é 1 se, e somente se ocorre uma aula isolada de alguma disciplina do currículo u em algum período representado por $s \in Z$ em um dia d.
- y são variáveis de decisão binárias indexadas por salas e disciplinas. Em qualquer solução viável, o valor de $y_{r,c}$ é 1 se, e somente se a sala r é utilizada pela disciplina c.

Dessa forma, a função objetivo pode ser expressa por:

$$
\begin{aligned}
min\ W^{RCap} & \sum_{r \in R} \sum_{p \in P} \sum_{\substack{c \in C \\ s^c > A^r}} x_{p,r,c}(S^c - A^r) \\
& + W^{TCom} \sum_{u \in U} \sum_{d \in D} \sum_{s \in Z} z_{u,d,s} \\
& + W^{TSpr} \sum_{c \in C} q_c + W^{RStb} \sum_{c \in C} ((\sum_{r \in R} y_{r,c}) - 1)
\end{aligned}
$$

3.1.3 Restrições

As restrições fortes são modeladas através de seis equações e inequações, apresentadas a seguir:

$$\forall c \in C, \quad \sum_{p \in P} \sum_{r \in R} x_{p,r,c} = E^c \tag{3.1.1}$$

$$\forall p \in P,\ \forall r \in R, \quad \sum_{c \in C} x_{p,r,c} \leqslant 1 \tag{3.1.2}$$

$$\forall p \in P,\ \forall c \in C, \quad \sum_{r \in R} x_{p,r,c} \leqslant 1 \tag{3.1.3}$$

$$\forall p \in P,\ \forall t \in T, \quad \sum_{r \in R} \sum_{c \in \tilde{T}^t} x_{p,r,c} \leqslant 1 \tag{3.1.4}$$

$$\forall p \in P,\ \forall u \in U, \quad \sum_{r \in R} \sum_{c \in \tilde{U}^u} x_{p,r,c} \leqslant 1 \tag{3.1.5}$$

$$\forall \langle c, p \rangle \in N, \quad \sum_{r \in R} x_{p,r,c} = 0 \tag{3.1.6}$$

A equação (3.1.1) obriga que um dado número de aulas seja lecionado para cada curso e mapeia a restrição de *aulas*. A inequação (3.1.2) garante que duas aulas não sejam lecionadas em uma mesma sala, num mesmo período e mapeia a restrição de *ocupação de sala*. As inequações (3.1.3) a (3.1.5) estipulam que apenas uma aula de uma disciplina, currículo, ou lecionada por um mesmo professor possa acontecer em qualquer período e mapeiam a restrição de *conflitos*. A equação (3.1.6) proíbe o uso de alguns períodos por alguns cursos e mapeia a restrição de *disponibilidade*.

As restrições fracas são modeladas através de nove equações e inequações, apresentadas a seguir:

$$\forall c \in C,\ \forall d \in D,\ \forall p \in \tilde{D}^d, \quad \sum_{r \in R} x_{p,r,c} \leqslant v_{d,c} \tag{3.1.7}$$

$$\forall c \in C,\ \forall d \in D, \quad \sum_{r \in R} \sum_{p \in \tilde{D}^d} x_{p,r,c} \geqslant v_{d,c} \tag{3.1.8}$$

$$\forall c \in C, \quad \sum_{d \in D} v_{d,c} \geqslant Q^c - q_c \tag{3.1.9}$$

$$\forall u \in U,\ d \in D,\ \forall \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle \in \tilde{D}^d, \quad \sum_{c \in \tilde{U}^u} \sum_{r \in R} (x_{p_1,r,c} - x_{p_2,r,c}) \leqslant z_{u,d,1} \tag{3.1.10}$$

$$\forall u \in U,\ d \in D,\ \forall \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle \in \tilde{D}^d, \quad \sum_{c \in \tilde{U}^u} \sum_{r \in R} (x_{p_4,r,c} - x_{p_3,r,c}) \leqslant z_{u,d,2} \tag{3.1.11}$$

$$\forall u \in U,\ d \in D,\ \forall \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle \in \tilde{D}^d, \quad \sum_{c \in \tilde{U}^u} \sum_{r \in R} (x_{p_2,r,c} - x_{p_1,r,c} - x_{p_3,r,c}) \leqslant z_{u,d,3} \tag{3.1.12}$$

$$\forall u \in U,\ d \in D,\ \forall \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle \in \tilde{D}^d, \quad \sum_{c \in \tilde{U}^u} \sum_{r \in R} (x_{p_3,r,c} - x_{p_2,r,c} - x_{p_4,r,c}) \leqslant z_{u,d,4} \tag{3.1.13}$$

$$\forall p \in P,\ \forall r \in R,\ \forall c \in C, \quad x_{p,r,c} \leqslant y_{r,c} \tag{3.1.14}$$

$$\forall r \in R,\ \forall c \in C, \quad \sum_{p \in P} x_{p,r,c} \geqslant y_{r,c} \tag{3.1.15}$$

As inequações (3.1.7) e (3.1.8) forçam o valor de $v_{d,c}$ a representar a existência (1) ou não (0) de alguma aula da disciplina c no dia d. O número de aulas em dias da semana distintos que a disciplina c está abaixo do estabelecido Q^c é forçado a q_c através da inequação (3.1.9). Assim, as inequações (3.1.7) a (3.1.9) mapeiam a restrição de *dias mínimos de trabalho*. No caso de uma instância que possui quatro períodos por dia, as inequações (3.1.10) e (3.1.11), verificam a presença aulas isoladas no primeiro e último período do dia, respectivamente, enquanto as inequações (3.1.12) e (3.1.13) verificam aulas isoladas nos períodos intermediários do dia. Vale ressaltar que se a instância tivesse, por exemplo, cinco períodos por dia, o modelo teria cinco inequações para mapear a restrição de *aulas isoladas*, sendo que as duas primeiras para verificar a presença de aulas isoladas no primeiro e último período do dia e as outras três para os demais períodos. Assim, as inequações (3.1.10) a (3.1.13) mapeiam a restrição de *aulas isoladas*. Por fim, as inequações (3.1.14) e (3.1.15) forçam os valores de y à máximos de alguns subconjuntos de x para assim ga-

rantir que o valor de $y_{r,c}$ seja 1 apenas se houver aula da disciplina c alocada na sala r, e 0 caso contrário, mapeando assim a restrição de *estabilidade de sala*.

3.2 Relaxação Lagrangiana

Relaxações são técnicas utilizadas para tornar um problema mais fácil de se resolver, e isso pode ser feito de diversas maneiras, como por exemplo: retirando uma restrição ou tornando uma variável irrestrita. Dado um problema de minimização P, e sua relaxação PR, o valor da solução de PR representa um piso para qualquer solução viável do problema original P, ou seja, o valor da solução de PR é menor ou igual à solução de P. A Relaxação Lagrangiana foi proposta pela primeira vez por Held; Karp (1970) e consiste em retirar uma ou mais restrições de um problema e adicioná-las à função objetivo, para isto, utiliza-se um vetor de multiplicadores chamados de multiplicadores de Lagrange. Assim, dado o problema de minimização P:

Minimizar:

$$\sum_j c_j x_j$$

Sujeito a:

$$Ax \leqslant b$$

$$Cx \leqslant d$$

$$x \geqslant 0$$

Considerando que a restrição $Ax \leqslant b$ seja uma restrição difícil de se atender, ela é retirada do conjunto de restrições e adicionada à função objetivo como um termo de penalidade, gerando assim a Relaxação Lagrangiana $L\alpha P$ do problema P:

Minimizar:

$$\sum_j c_j x_j + \alpha(Ax - b)$$

Sujeito a:

$$Cx \leqslant d$$
$$x \geqslant 0$$

Para obter o melhor limitante inferior para o problema P, deve-se encontrar o maior valor possível para a sua relaxação $L\alpha P$. Segundo Mauri (s.d.) esse valor é obtido quando encontra-se um conjunto de valores ótimos para os multiplicadores de Lagrange, o que pode ser feito ao resolver o dual lagrangeano ($DL\alpha P$) apresentado a seguir.

Maximizar:

$$L\alpha P$$

Sujeito a:

$$\alpha \geqslant 0$$

De acordo com o Teorema da Dualidade Forte, se os problemas $L\alpha P$ (primal) e $DL\alpha P$ (dual) são viáveis, então as soluções ótimas desses problemas possuem o mesmo valor. Caso ambas as versões do problema relaxado, primal e dual, forem viáveis, então elas são resolvidas e a distância (*gap*) entre as soluções é calculado com o intuito de medir a proximidade da solução ótima. O *gap* é normalmente calculado em porcentagem e o objetivo é diminuir o seu valor para se aproximar da solução ótima.

Para resolver o Dual Lagrangeano é possível utilizar diferentes abordagens, porém, a mais comum é através do Algoritmo de Subgradientes. Dado o problema de minimização P descrito anteriormente e seu conjunto de restrições $Ax \leqslant b$ a serem relaxadas, o Algoritmo de Subgradientes pode ser

descrito como segue:

Algoritmo 1: Algoritmo de Subgradientes

Entrada: vetor de multiplicadores α^0 ($\alpha \geqslant 0$)

1 $lb \longleftarrow -\infty$ (limitante inferior);

2 $ub \longleftarrow +\infty$ (limitante superior);

3 **repita**

4 RESOLVER (o modelo relaxado $L_\alpha P$ obtendo um vetor de soluções x_α e $f(L_\alpha P)$);

5 OBTER (uma solução viável para P e o correspondente valor $f(P)$);

6 ATUALIZAR ($lb = max[lb, f(L_\alpha P)]$);

7 ATUALIZAR ($ub = min[ub, f(P)]$);

8 CALCULAR (os subgradientes $\varphi = Ax_\alpha - b$);

9 CALCULAR (o passo ε: $\varepsilon = \frac{\eta(ub-lb)}{\|\varphi\|^2}$);

10 ATUALIZAR (os multiplicadores $\alpha : \alpha^{t+1} = Max(0, \alpha^t + \varepsilon_t(Ax - b))$);

11 **até** *(que um critério de parada seja atingido)*;

Adaptado de Mauri (s.d.)

A entrada do Algoritmo consiste de um vetor de multiplicadores com valores maiores ou iguais à zero. Nas linhas 1 e 2 inicializa-se os limitantes inferior e superior. Na linha 4 o modelo relaxado é resolvido, obtendo então o vetor de solução x_α e seu valor $f(L_\alpha P)$ correspondente. Em seguida, utiliza-se a solução x_α para obter uma solução viável para P. Uma outra alternativa é a utilização do valor de uma solução viável já conhecida, fazendo com que não seja necessário a obtenção de uma nova solução viável para o problema a cada iteração. Nesse caso, o objetivo passa a ser a verificação da qualidade dessa solução. Nas linhas 6 e 7 utiliza-se os valores das soluções encontradas para o modelo relaxado $L_\alpha P$ e o problema original P para atualizar os limitantes inferior e superior, respectivamente. Na linha 8, utiliza-se as restrições relaxadas para calcular os subgradientes. Em seguida, calcula-se o passo ε, que é utilizado para direcionar a busca pelos novos valores para os multiplicadores. O cálculo do passo utiliza η como parâmetro de controle e seu valor influencia no "tamanho" do passo. O parâmetro de controle η foi proposto por Held; Karp (1970) e normalmente utiliza-se 2 como seu valor inicial. Caso $f(L_\alpha P)$ não diminua por 30 iterações

consecutivas, o valor de η é reduzido pela metade. Na linha 10 calcula-se os novos valores para os multiplicadores utilizando o passo, as restrições relaxadas e os valores atuais dos multiplicadores. No caso de restrições do tipo $\geqslant$, o valor mínimo seria utilizado no lugar do máximo durante a atualização dos multiplicadores. Como critério de parada, pode-se utilizar diferentes abordagens, como por exemplo um valor limite para o parâmetro de controle η, tempo de execução, *gap* entre os limitantes inferior e superior ou um número máximo de iterações.

3.3 Aplicação da Relaxação Lagrangiana no PTHU

O método proposto neste trabalho foi aplicado em 21 instâncias (*comp01*∼*comp21*) utilizadas na formulação CB-CTT do ITC-2007. Para aplicar a Relaxação Lagrangiana ao CB-CTT, deve-se primeiramente escolher o conjunto de restrições que serão relaxadas. Neste trabalho, a escolha deste conjunto de restrições foi feita utilizando a seguinte metodologia: primeiramente, cada restrição foi relaxada separadamente e, em seguida, diferentes combinações de pares de restrições. Para cada configuração, a relaxação foi aplicada à instância *comp01* do ITC-2007, o problema resultante foi resolvido utilizando o solver CPLEX e o tempo gasto foi observado. As restrições de *aulas isoladas* (3.1.10 a 3.1.13) e de *estabilidade de sala* (3.1.14 e 3.1.15) se mostraram as mais custosas de serem atendidas e a relaxação dessas restrições resultou em um tempo computacional menor para a resolução do problema quando comparado à outras combinações, portanto, essa foi a combinação de restrições escolhida para a relaxação.

Além da definição do conjunto de restrições a ser relaxado, deve-se também definir os critérios de parada a serem utilizados. Neste trabalho, foram realizados testes aplicando o método proposto ao problema utilizando duas abordagens distintas para critério de parada. Na primeira, utilizou-se um tempo limite de execução de 3600 segundos (1 hora), já na segunda, utilizou-se um valor limite de $0,005$ para η ($\eta < 0,005$) ou um tempo limite de execução de 28800 segundos (8 horas). Vale ressaltar que o tempo de 28800 segundos foi definido a partir da análise de testes preliminares nos quais foi possível observar que, em grande parte das instâncias, o valor de η atingiu o limite definido pelo critério de parada aproximadamente neste tempo.

Além desses critérios de parada, o método termina se $ub - lb < 1$ ou se a norma do vetor de subgradientes é igual a 0 ($\|\varphi\| = 0$). Esses critérios de parada adicionais são importantes pois evitam que a execução continue quando a solução já não possa ser melhorada ($ub - lb < 1$) e que ocorra uma divisão por 0 durante o cálculo de ε ($\|\varphi\| = 0$).

Vale ressaltar que neste trabalho, o método proposto foi aplicado ao problema utilizando também duas abordagens distintas para o limitante superior no Algoritmo 1. A primeira abordagem utiliza uma heurística que viabiliza a solução do problema relaxado e a segunda utiliza o valor de uma solução viável já conhecida. Para a segunda abordagem, utilizou-se os melhores valores encontrados no ITC-2007. O Algoritmo para a heurística de viabilização é detalhado no item 3.3.1 e o Algoritmo completo da solução é detalhado no item 3.3.2.

3.3.1 Heurística de viabilização

A heurística de viabilização utilizada consiste na atualização dos valores das variáveis y e z a partir daqueles obtidos para as variáveis x. A atualização dos valores de z é dada da seguinte maneira: Para cada currículo, a tabela-horário de suas disciplinas são percorridas por cada dia e cada período do dia, buscando por aulas isoladas. Caso haja uma aula isolada de uma disciplina do currículo u no período s do dia d, o valor de $z_{u,d,s}$ é atualizado para 1, caso contrário seu valor é atualizado para 0. Para a atualização dos valores de y, as alocações de aulas de cada disciplina são analisadas, verificando as salas em que as aulas foram alocadas. Se ocorre uma aula da disciplina c na sala r, o valor de $y_{r,c}$ é atualizado para 1, caso contrário seu valor é atualizado para 0. O pseudo-código para a heurística de viabilização é apresentado a seguir:

Algoritmo 2: Heurística de viabilização

Entrada: Solução relaxada
Saída: Solução viável

```
// Atualização dos valores de z
para todo u ∈ U faça
    para todo d ∈ D faça
        para todo s ∈ D̃^d faça
            se (há uma aula isolada de disciplinas de U no período s) então
                z_{u,d,s} = 1
            senão
                z_{u,d,s} = 0
            fim se
        fim para todo
    fim para todo
fim para todo
// Atualização dos valores de y
para todo c ∈ C faça
    para todo r ∈ R faça
        se (há uma aula da disciplina c alocada na sala r) então
            y_{r,c} = 1
        senão
            y_{r,c} = 0
        fim se
    fim para todo
fim para todo
```

3.3.2 Relaxação Lagrangiana para a formulação CB-CTT do PTHU

Como mencionado anteriormente, a Relaxação Lagrangiana foi aplicada no PTHU utilizando duas abordagens distintas para o limitante superior no Algoritmo 1, portanto, o método possui duas variações. A abordagem que utiliza um limitante superior fixo é descrita pelo Algoritmo 3, enquanto a abordagem que utiliza a heurística de viabilização é descrita pelo Algoritmo 4. Em ambos os Algoritmos, considerou-se $Dx - d$ como sendo a matriz formada pelas restrições relaxadas, que neste caso correspondem às inequações (3.1.10) a (3.1.13), (3.1.14) e (3.1.15). Durante a atualização dos multiplicadores nas linhas 25 e 28 dos Algoritmos 3 e 4, respectivamente, utiliza-se o valor mínimo para as restrições (3.1.10) a (3.1.13) e (3.1.14), por serem restrições do tipo $\leqslant$, enquanto para as restrições (3.1.15) utiliza-se o valor máximo por serem restrições do tipo $\geqslant$.

Algoritmo 3: Relaxação Lagrangiana com limitante superior fixo

Entrada: Problema original (P), Vetor de multiplicadores (α^0), Limitante superior (ub)

1 INICIALIZAR ($lb = -\infty$, $iteracaoSemMelhora = 0$ e $continua = Verdadeiro$);
2 **enquanto** *(continua)* **faça**
3 RELAXAR (o problema original P para obter o problema relaxado $L_\alpha P$);
4 RESOLVER ($L_\alpha P$ utilizando o CPLEX para obter a solução x_α);
5 CALCULAR ($f(L_\alpha P)$);
6 **se** *($f(L_\alpha P) > lb$)* **então**
7 $lb \longleftarrow f(L_\alpha P)$;
8 $iteracaoSemMelhora \longleftarrow 0$;
9 $MelhorSolucao \longleftarrow x_\alpha$;
10 **senão**
11 $iteracaoSemMelhora \longleftarrow iteracaoSemMelhora + 1$;
12 **fim se**
13 **se** *($ub - lb < 1$)* **então**
14 **retorna** $MelhorSolucao$;
15 **fim se**
16 **se** *($iteracaoSemMelhora = 30$)* **então**
17 $\eta \longleftarrow \frac{\eta}{2}$;
18 $iteracaoSemMelhora \longleftarrow 0$;
19 **fim se**
20 CALCULAR (os subgradientes $\varphi = Dx_\alpha - d$);
21 **se** *($\|\varphi\| = 0$)* **então**
22 **retorna** $MelhorSolucao$;
23 **fim se**
24 CALCULAR (o passo ε: $\varepsilon = \frac{\eta(ub-lb)}{\|\varphi\|^2}$);
25 ATUALIZAR (os multiplicadores $\alpha : \alpha^{t+1} = MIN(0, \alpha^t - \varepsilon_t(Dx - d))$ ou $\alpha^{t+1} = MAX(0, \alpha^t - \varepsilon_t(Dx - d))$);
26 **se** *(critério de parada for atingido)* **então**
27 $continua \longleftarrow Falso$;
28 **fim se**
29 **fim enqto**
30 **retorna** $MelhorSolucao$;

O Algoritmo 4 apresentado a seguir é, em sua maior parte, similar ao Algoritmo 3, se diferenciando apenas nas linhas 1, 6, 7 e 15 do Algoritmo 4. No Algoritmo 3 o ub é um parâmetro de entrada do Algoritmo, enquanto no Algoritmo 4 é inicializado com $+\infty$. Nas linhas 6 e 7 do Algoritmo 4, respectivamente, uma solução viável x de P é obtida e calculado o valor de $f(x)$. No Algoritmo 3 isso não é necessário pois o valor de ub não será atualizado durante a execução, já que é fixo. Portanto, na linha 15 do Algoritmo 4 é possível observar outra diferença em relação ao Algoritmo 3, que corresponde à atualização do valor de ub.

Algoritmo 4: Relaxação Lagrangiana com heurística de viabilização

Entrada: Problema original (P), Vetor de multiplicadores (α^0)

1 INICIALIZAR ($lb = -\infty$, $ub = +\infty$, $continua = Verdadeiro$ e $iteracaoSemMelhora = 0$);
2 **enquanto** *(continua)* **faça**
3 RELAXAR (o problema original P para obter o problema relaxado $L_\alpha P$);
4 RESOLVER ($L_\alpha P$ utilizando o CPLEX para obter a solução x_α);
5 CALCULAR ($f(L_\alpha P)$);
6 OBTER (Uma solução viável x para P);
7 CALCULAR($f(P)$ utilizando x);
8 **se** *($f(L_\alpha P) > lb$)* **então**
9 $iteracaoSemMelhora \longleftarrow 0$;
10 $MelhorSolucao \longleftarrow x_\alpha$;
11 **senão**
12 $iteracaoSemMelhora \longleftarrow iteracaoSemMelhora + 1$;
13 **fim se**
14 ATUALIZAR (o limitante inferior: $lb = MAX[lb, f(L_\alpha P)]$);
15 ATUALIZAR (o limitante superior: $ub = MIN[ub, f(P)]$);
16 **se** *($ub - lb < 1$)* **então**
17 **retorna** $MelhorSolucao$;
18 **fim se**
19 **se** *($iteracaoSemMelhora = 30$)* **então**
20 $\eta \longleftarrow \frac{\eta}{2}$;
21 $iteracaoSemMelhora \longleftarrow 0$;
22 **fim se**
23 CALCULAR (os subgradientes $\varphi = Dx_\alpha - d$);
24 **se** *($\|\varphi\| = 0$)* **então**
25 **retorna** $MelhorSolucao$;
26 **fim se**
27 CALCULAR (o passo ε: $\varepsilon = \frac{\eta(ub-lb)}{\|\varphi\|^2}$);
28 ATUALIZAR (os multiplicadores $\alpha : \alpha^{t+1} = MIN(0, \alpha^t - \varepsilon_t(Dx - d))$ ou $\alpha^{t+1} = MAX(0, \alpha^t - \varepsilon_t(Dx - d))$);
29 **se** *(critério de parada for atingido)* **então**
30 $continua \longleftarrow Falso$
31 **fim se**
32 **fim enqto**
33 **retorna** $MelhorSolucao$;

Capítulo 4

Resultados obtidos

O método proposto foi aplicado ao problema realizando quatro testes distintos. Em cada um desses testes, utilizou-se diferentes combinações de critérios de parada e abordagens para o limitante superior. Essas combinações utilizam as abordagens descritas na seção 3.3.

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir dos testes realizados para as instâncias do ITC-2007 (*comp01* $\sim$ *comp21*). Apresenta-se também os parâmetros utilizados na execução dos testes.

4.1 Ambiente de testes e Desenvolvimento

O método proposto foi implementado utilizando a linguagem de programação *C* e a versão *12.71* do *solver CPLEX*. Para auxiliar no desenvolvimento utilizou-se o *Integrated Development Environment* (*IDE*) *Visual Studio 2015*. O código está disponibilizado em um repositório público na plataforma *Github* e pode ser acessado em: https://github.com/tallesventura/relaxacao-lagrangiana .

Para a realização dos testes utilizou-se um computador *desktop* com as configurações descritas na Tabela 4.1.

Item	Descrição
Processador	Intel(R) Core(TM) i5-3570 CPU @ 3,40GHz
Memória (RAM)	8,00GB
Sistema Operacional	Windows 8.1
Tipo de Sistema	64 bits

Tabela 4.1: Configuração do ambiente de testes

4.2 Parâmetros utilizados

Os parâmetros utilizados nos testes são divididos em duas categorias: parâmetros comuns à todos os testes e parâmetros específicos de cada teste. Existem dois parâmetros comuns. O primeiro deles é o vetor de multiplicadores α^0 que tem todos os seus valores inicializados com 0. O segundo é o parâmetro de controle η para o cálculo do passo que nesse trabalho foi definido como $\eta = 2$.

Para os testes que utilizam um valor fixo para o limitante superior (ub), utilizou-se os melhores valores encontrados para cada uma das instâncias no ITC-2007. Esses valores são apresentados na tabela 4.2 e foram obtidos acessando a *web-page* oficial da competição:
http://satt.diegm.uniud.it/ctt/index.php?page=rankings&see=best.

Para critério de parada, utiliza-se duas abordagens distintas de teste, como descrito na seção 3.3. A primeira, denominada RL_{Curta}, utiliza apenas um tempo limite de execução, enquanto a segunda, denominada RL_{Longa}, utiliza adicionalmente um valor limite para η, como mostra a Tabela 4.3.

Os resultados dos testes que utilizam a abordagem RL_{Curta} são apresentados na Seção 4.3, enquanto os demais, que que utilizam RL_{Longa}, são apresentados na Seção 4.4. Por fim, na Seção 4.5 é feita uma comparação entre os resultados obtidos por essas duas abordagens.

Instância	Valor
Comp01	5
Comp02	24
Comp03	64
Comp04	35
Comp05	284
Comp06	27
Comp07	6
Comp08	37
Comp09	96
Comp10	4
Comp11	0
Comp12	294
Comp13	59
Comp14	51
Comp15	62
Comp16	18
Comp17	56
Comp18	61
Comp19	57
Comp20	4
Comp21	74

Tabela 4.2: Limitantes superiores

	Tempo (s)	η
RL_{Curta}	3600	-
RL_{Longa}	28800	$\leqslant 0,005$

Tabela 4.3: Critérios de parada

4.3 RL_{Curta}

Nesta seção serão apresentados e discutidos os resultados obtidos pelos testes que utilizam um tempo limite de execução de 3600 segundos (1 hora) como critério de parada. A Tabela 4.4 apresenta os resultados obtidos utilizando a heurística de viabilização da solução relaxada e utilizando um limitante superior fixo, sendo que:

- *LB* é o melhor limitante inferior obtido.
- *UB* é a melhor solução viável obtida.
- *GAP* é a distância, em porcentagem, entre LB e UB e é dado pela fórmula: $GAP = |\frac{UB-LB}{UB}| \times 100$.
- *Tempo* é o tempo, em segundos, que o teste utilizou durante a execução.

Como mencionado na Seção 4.2, nos testes em que utiliza-se um UB fixo são utilizados os valores da Tabela 4.2.

	Heurística de Viabilização				*UB* fixo			
Instância	*LB*	*UB*	*GAP*(%)	Tempo (s)	*LB*	*UB*	*GAP*(%)	Tempo (s)
Comp01	-19,75	119	116,60	3.600	-19,82	5	496,36	3.600
Comp02	-82,00	465	117,63	3.603	-78,49	24	427,05	3.637
Comp03	-72,00	547	113,16	3.602	-66,48	64	203,88	3.616
Comp04	-79,00	499	115,83	3.601	-77,40	35	321,13	3.619
Comp05	-39,00	1.357	102,87	3.617	-35,57	284	112,52	3.617
Comp06	-108,00	652	116,56	3.802	-108,00	27	500,00	7.777
Comp07	-131,00	705	118,58	4.957	-131,00	6	2.283,33	3.997
Comp08	-86,00	564	115,25	3.631	-84,88	37	329,40	3.629
Comp09	-76,00	634	111,99	3.631	-74,45	96	177,56	3.632
Comp10	-115,00	589	119,52	39.440	-115,00	4	2.975,00	3.624
Comp11	-26,16	131	119,97	3.600	-26,16	0	-	3.601
Comp12	-88,00	1.517	105,80	3.659	-88,00	294	129,93	3.663
Comp13	-82,00	588	113,95	3.602	-81,90	59	238,81	3.632
Comp14	-85,00	499	117,03	3.616	-84,42	51	265,54	3.630
Comp15	-72,00	547	113,16	3.620	-66,48	62	207,23	3.610
Comp16	-108,00	623	117,34	3.611	-108,00	18	700,00	3.647
Comp17	-99,00	590	116,78	3.659	-98,23	56	275,41	3.625
Comp18	-40,77	512	107,96	3.600	-39,16	61	164,20	3.603
Comp19	-68,13	495	113,76	3.605	-64,58	57	213,31	3.628
Comp20	-121,00	748	116,18	3.725	-121,00	4	3.125,00	8.446
Comp21	-94,00	672	113,99	3.652	-94,00	74	227,03	3.653

Tabela 4.4: Resultados da RL_{Curta}

A verificação do tempo de execução dos Algoritmos 3 e 4 só é feita após o cálculo dos novos multiplicadores, não limitando o tempo gasto pelo CPLEX durante a resolução do problema relaxado. Esse fato faz com que, em algumas instâncias, o tempo limite de execução de 3600 segundos seja excedido. Esse comportamento pode ser observado principalmente nas instâncias *comp10* e *comp07* para a abordagem que utiliza a heurística de viabilização e nas instâncias *comp06* e *comp20* para a abordagem que utiliza o *UB* fixo.

No geral, a abordagem que utiliza o *UB* fixo teve um melhor desempenho quando comparada à abordagem que utiliza a heurística de viabilização. A primeira apresentou melhores resultados em 12 das 21 instâncias, enquanto a segunda foi melhor somente na instância *comp01*. Nas demais instâncias, ambas abordagens trouxeram os mesmos resultados.

Em relação aos *GAP's*, é possível observar que a abordagem que utiliza a heurística de viabilização proporcionou valores mais próximos da sua média $(114,47)$ quando comparado aos da abordagem que utiliza *UB* fixo. A primeira apresentou um desvio padrão de $4,36$, enquanto a segunda apresentou um desvio padrão de $938,69$ em relação à sua média $668,63$.

A tabela 4.5 faz uma comparação entre os limitantes inferiores obtidos pelas duas abordagens, apresentando a *Diferença Relativa* entre elas. A *Diferença Relativa* (DR) é dada em porcentagem e é obtida pela fórmula: $DR = |\frac{MIN(LB_1,LB_2)-MAX(LB_1,LB_2)}{MAX(LB_1,LB_2)}| \times 100$, onde LB_1 e LB_2 são os limitantes inferiores obtidos pelas abordagens que utilizam a Heurística de viabilização e UB Fixo, respectivamente.

Instância	DR (%)
Comp01	0,34
Comp02	4,47
Comp03	8,30
Comp04	2,07
Comp05	9,65
Comp06	0,00
Comp07	0,00
Comp08	1,32
Comp09	2,08
Comp10	0,00
Comp11	0,00
Comp12	0,00
Comp13	0,13
Comp14	0,68
Comp15	8,30
Comp16	0,00
Comp17	0,79
Comp18	4,09
Comp19	5,49
Comp20	0,00
Comp21	0,00

Tabela 4.5: Diferença relativa dos limitantes inferiores dos testes RL_{Curta}

É possível observar que os limitantes inferiores obtidos por ambas abordagens foram bem próximos para todas as instâncias, apresentando uma média de DR de aproximadamente $2,27\%$.

4.4 RL_{Longa}

Nesta seção serão apresentados e discutidos os resultados obtidos pelos testes que utilizam um valor limite do parâmetro de controle $\eta = 0,005$ e um tempo limite de execução de 28800 segundos (8 horas) como critério de parada. A tabela 4.6 apresenta os resultados obtidos utilizando a heurística de viabilização e utilizando um *UB* fixo. Suas definições são equivalentes às apresentadas para a Tabela 4.4.

	Heurística de Viabilização				*UB* fixo			
Instância	*LB*	*UB*	*GAP*(%)	Tempo (s)	*LB*	*UB*	*GAP*(%)	Tempo (s)
Comp01	-19,93	131	115,21	750	-19,85	5	497,00	730
Comp02	-69,50	465	114,95	28.895	-69,59	24	389,96	28.838
Comp03	-59,04	547	110,79	25.451	-58,30	64	191,09	28.840
Comp04	-65,11	499	113,05	20.169	-64,18	35	283,36	28.824
Comp05	-27,36	1.132	102,42	13.765	-26,25	284	109,24	22.839
Comp06	-98,66	638	115,46	28.852	-102,13	27	478,26	28.883
Comp07	-131,00	643	120,37	178.294	-131,00	6	2.283,33	31.597
Comp08	-70,49	564	112,50	22.522	-69,48	37	287,78	28.808
Comp09	-62,21	634	109,81	23.717	-61,37	96	163,92	28.832
Comp10	-115,00	589	119,52	38.792	-109,80	4	2.844,88	28.877
Comp11	-26,34	158	116,67	692	-26,19	0	-	915
Comp12	-74,31	1.501	104,95	28.808	-76,99	294	126,19	28.815
Comp13	-66,48	588	111,31	24.560	-65,73	59	211,41	28.804
Comp14	-70,25	499	114,08	28.831	-69,86	51	236,97	28.817
Comp15	-59,04	547	110,79	26.680	-58,24	62	193,94	28.721
Comp16	-101,88	623	116,35	28.841	-96,55	18	636,39	29.127
Comp17	-80,68	590	113,67	29.927	-78,89	56	240,87	28.910
Comp18	-38,51	484	107,96	5.921	-38,11	61	162,47	7.646
Comp19	-51,93	495	110,49	23.970	-51,29	57	189,98	28.810
Comp20	-121,00	721	116,78	30.684	-119,88	4	3.097,03	30.423
Comp21	-86,25	672	112,84	28.804	-81,62	74	210,30	28.892

Tabela 4.6: Resultados da RL_{Longa}

Assim como mencionado na Seção 4.3, o tempo de execução do CPLEX não é limitado, fazendo com que algumas instâncias ultrapassem o limite de tempo estabelecido (28800 segundos). Este comportamento pode ser observado principalmente nas instâncias *comp07* e *comp10* para a abordagem que utiliza a heurística de viabilização e nas instâncias *comp07* e *comp20* para a abordagem

que utiliza um *UB* fixo. Vale observar que, para a instância *comp07*, os tempos de execução obtidos pela abordagem que utiliza a heurística de viabilização e pela abordagem que utiliza um *UB* fixo foram muito diferentes. A primeira abordagem obteve um tempo de execução 564.27% maior em relação à segunda.

Na grande maioria das instâncias (18 das 21), a abordagem que utiliza um *UB* fixo obteve melhores resultados quando comparada à abordagem que utiliza a heurística de viabilização, que por sua vez obteve melhores resultados somente em 2 das 21 instâncias (*comp06* e *comp12*). Vale observar que para a instância *comp07* ambas as abordagens obtiveram o mesmo resultado.

Ao analisar a média e o desvio padrão dos valores obtidos para os *GAP's*, é possível observar que a abordagem que utiliza a heurística de viabilização obteve valores mais próximos de sua média $(112,86)$ quando comparada à abordagem que utiliza um *UB* fixo. A primeira obteve um desvio padrão de $4,38$, enquanto a segunda obteve um desvio padrão de $924,88$ em relação à sua média $641,72$.

Assim como feito na Seção 4.4 para a RL_{Curta}, a *Diferença Relativa (DR)* para os resultados obtidos pela RL_{Longa} também foi calculada e os valores encontrados são apresentados na Tabela 4.7. A Tabela 4.7 segue as mesmas definições apresentadas para a Tabela 4.5.

Instância	*DR* (%)
Comp01	0,41
Comp02	0,13
Comp03	1,27
Comp04	1,45
Comp05	4,26
Comp06	3,52
Comp07	0,00
Comp08	1,45
Comp09	1,37
Comp10	4,74
Comp11	0,58
Comp12	3,60
Comp13	1,14
Comp14	0,57
Comp15	1,37
Comp16	5,53
Comp17	2,27
Comp18	1,07
Comp19	1,25
Comp20	0,93
Comp21	5,68

Tabela 4.7: Diferença relativa dos limitantes inferiores dos testes RL_{Longa}

É possível observar que os limitantes inferiores obtidos por ambas abordagens foram bem próximos para todas as instâncias, apresentando uma média de *DR* de aproximadamente $2,03\%$. As instâncias com maior *DR* entre seus resultados foram a *comp16* e *comp21*.

4.5 Comparativo entre RL_{Curta} e RL_{Longa}

Com os resultados apresentados, pode-se observar que, tanto para a RL_{Curta} quanto para RL_{Longa}, a abordagem que utiliza um *UB* fixo obteve melhores resultados quando comparado à abordagem que utiliza a heurística de viabilização, apresentando melhores resultados em 18 e 12 das 21 instâncias, respectivamente.

Em relação aos *GAP's*, vale observar que, tanto para a RL_{Curta} quanto para RL_{Longa}, a abordagem

que utiliza um *UB* fixo apresentou uma média maior para os valores de seus *GAP's* quando comparada à abordagem que utiliza a heurística de viabilização. A primeira obteve média de $668,63$ e $641,72$ para a RL_{Curta} e RL_{Longa}, respectivamente, enquanto a segunda obteve $114,47$ e $112,86$.

Outro ponto a ser observado é o *percentual de melhora* (PM) dos resultados obtidos pela RL_{Longa} quando comparados aos resultados obtidos pela RL_{Curta}. A tabela 4.8 apresenta o valor de PM para todas as instâncias, tanto para a abordagem que utiliza a heurística de viabilização quanto para a abordagem que utiliza um *UB* fixo. O valor de PM é dado por: $PM = \frac{f(RL_{Curta})-f(RL_{Longa})}{f(RL_{Curta})} \times 100$, sendo que:

- $f(RL_{Curta})$ é o valor do melhor limitante inferior obtido na RL_{Curta}.
- $f(RL_{Longa})$ é o valor do melhor limitante inferior obtido na RL_{Longa}.

	PM (%)	
Instância	Viabilização	*UB* fixo
Comp01	-0,91	-0,16
Comp02	15,24	11,34
Comp03	18,00	12,30
Comp04	17,59	17,08
Comp05	29,84	26,21
Comp06	8,65	5,44
Comp07	0,00	0,00
Comp08	18,04	18,14
Comp09	18,15	17,58
Comp10	0,00	4,53
Comp11	-0,68	-0,10
Comp12	15,55	12,51
Comp13	18,92	19,73
Comp14	17,35	17,26
Comp15	18,00	12,39
Comp16	5,66	10,60
Comp17	18,50	19,69
Comp18	5,52	2,69
Comp19	23,78	20,59
Comp20	0,00	0,92
Comp21	8,24	13,17

Tabela 4.8: Percentual de melhora dos resultados da RL_{Longa} em relação à RL_{Curta}

É possível observar que para a abordagem que utiliza a heurística de viabilização, os resultados obtidos melhoraram em 16 das 21 instâncias, apresentando uma melhora superior a 15% em 12 instâncias. Em duas instâncias (*comp01* e *comp11*), os resultados apresentaram uma pequena piora, enquanto nas instâncias *comp07*, *comp10* e *comp20* os valores obtidos não mudaram.

Na abordagem que utiliza um *UB* fixo, a quantidade de instâncias em que houve uma melhora dos resultados obtidos aumentou quando comparado à abordagem que utiliza a heurística de viabilização. Os resultados obtidos foram melhores em 18 das 21 instâncias, apresentando uma melhora superior a 15% em 7 instâncias. Nessa abordagem também houve uma pequena piora nas instâncias *comp01* e *comp11*, porém, somente na instância *comp07* os valores obtidos permaneceram inalterados.

Na abordagem que utiliza a heurística de viabilização, os resultados obtidos melhoraram em média $12,16\%$ na RL_{Longa}, enquanto na abordagem que utiliza um UB fixo os resultados melhoraram em média $11,52\%$.

Capítulo 5

Conclusões

Ao analisar os resultados obtidos pelo método proposto, foi possível perceber que os resultados encontrados não foram satisfatórios e um elemento que contribuiu para isso foi a heurística de viabilização utilizada. Ao deixar de alterar valores das variáveis x durante a viabilização, as vizinhanças possíveis para exploração foram menores, o que pode ter restringido a descoberta de limitantes superiores melhores e, portanto, uma convergência mais rápida do *gap*.

Apesar da qualidade inferior dos resultados obtidos, foi possível observar alguns comportamentos do método em relação às restrições escolhidas para serem relaxadas. Dentre esses comportamentos, foi observado que ao relaxar todas as restrições em que as variáveis z estão presentes (3.1.10 a 3.1.13), as soluções encontradas sempre possuiam valor 0 para todas as variáveis z, uma vez que o problema é de minimização. O mesmo ocorreu para as variáveis y ao relaxar as restrições (3.1.14) e (3.1.15). Juntamente com a heurística de viabilização, esse comportamento pode ter contribuído para a qualidade inferior dos resultados obtidos.

Durante o desenvolvimento deste trabalho foi considerada a implementação de outra heurística de viabilização e também escolher outro conjunto de restrições a serem relaxadas, porém, o esforço necessário para realizar essas mudanças não permitiria atender o escopo deste trabalho no tempo determinado. Dessa forma, essas sugestões podem ser consideradas em trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

Bettinelli, Andrea; Cacchiani, Valentina; Roberti, Roberto; Toth, Paolo (2015). "An overview of curriculum-based course timetabling". Em: *TOP* 23.2, pp. 313–349. DOI: 10.1007/s11750-015-0366-z. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s11750-015-0366-z.

Brännlund, U.; Lindberg, P. O.; Nõu, A.; Nilsson, J.-E. (1998). "Railway Timetabling Using Lagrangian Relaxation". Em: *Transportation Science* 32.4, pp. 358–369. DOI: 10.1287/trsc.32.4.358. eprint: https://doi.org/10.1287/trsc.32.4.358. URL: https://doi.org/10.1287/trsc.32.4.358.

Burke, Edmund K; Mareček, Jakub; Parkes, Andrew J; Rudová, Hana (2010). "Decomposition, reformulation, and diving in university course timetabling". Em: *Computers & Operations Research* 37.3, pp. 582–597.

Ciscon, Leonardo Aparecido; Alvarenga, GB (2005). "O problema de geração de horários: um foco na eliminação de janelas e aulas isoladas". Em: *XXXVII Brazilian Symposium of Operational Research*.

Di Gaspero, Luca; McCollum, Barry; Schaerf, Andrea (2007). *The second international timetabling competition (ITC-2007): Curriculum-based course timetabling (track 3)*. Rel. téc. Technical Report QUB/IEEE/Tech/ITC2007/CurriculumCTT/v1. 0, Queen's University, Belfast, United Kingdom.

Gotlieb, Calvin C. (1962). "The Construction of Class-Teacher Time-Tables". Em: *IFIP Congress*, pp. 73–77.

Gunawan, Aldy; Ng, Kien Ming; Poh, Kim Leng (2012). "A hybridized Lagrangian relaxation and simulated annealing method for the course timetabling problem". Em: *Computers Operations Research* 39.12, pp. 3074–3088. ISSN: 0305-0548. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.03.011. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054812000640.

Held, Michael; Karp, Richard M (1970). "The traveling-salesman problem and minimum spanning trees". Em: *Operations Research* 18.6, pp. 1138–1162.

Kohl, Niklas; Madsen, Oli B. G. (1997). "An Optimization Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Windows Based on Lagrangian Relaxation". Em: *Operations Research* 45.3, pp. 395–406. DOI: 10.1287/opre.45.3.395. eprint: https://doi.org/10.1287/opre.45.3.395. URL: https://doi.org/10.1287/opre.45.3.395.

Kristiansen, Simon; Sørensen, Matias; Stidsen, Thomas R. (2015). "Integer programming for the generalized high school timetabling problem". Em: *Journal of Scheduling* 18.4, pp. 377–392. ISSN: 1099-1425. DOI: 10.1007/s10951-014-0405-x. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s10951-014-0405-x.

Lewis, R. (2007). "A Survey of Metaheuristic-based Techniques for University Timetabling Problems". Em: *OR Spectrum*.

Lü, Zhipeng; Hao, Jin-Kao (2008). "Solving the Course Timetabling Problem with a Hybrid Heuristic Algorithm". Em: *Artificial Intelligence: Methodology, Systems, and Applications: 13th International Conference, AIMSA 2008, Varna, Bulgaria, September 4-6, 2008. Proceedings*. Ed. por Dochev, Danail; Pistore, Marco; Traverso, Paolo. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 262–273. ISBN: 978-3-540-85776-1. DOI: 10.1007/978-3-540-85776-1_22. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-85776-1_22.

Mauri, Geraldo Regis (s.d.). "Novas abordagens para representação e obtenção de limitantes e soluções para alguns problemas de otimização combinatória". pt. Tese de doutorado. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, p. 239. URL: http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2008/11.02.01.55.

Müller, Tomáš (2009). "ITC2007 solver description: a hybrid approach". Em: *Annals of Operations Research* 172.1, p. 429. ISSN: 1572-9338. DOI: 10.1007/s10479-009-0644-y. URL: https://doi.org/10.1007/s10479-009-0644-y.

Rocha, Walace de Souza (2013). "Algoritmo grasp para o problema de tabela-horário de universidades". Diss. de mestrado. Universidade Federal do Espırito Santo.

Santos, Haroldo Gambini; Souza, Marcone Jamilson Freitas (2007). "Programação de horários em instituições educacionais: formulações e algoritmos". Em: *XXXIX SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* 1, pp. 2827–2882.

Schaerf, A. (1999). "A Survey of Automated Timetabling". Em: *Artificial Intelligence Review* 13.2, pp. 87–127. ISSN: 1573-7462. DOI: 10.1023/A:1006576209967. URL: http://dx.doi.org/10.1023/A:1006576209967.

Segatto, Erika de Almeida; Boeres, Maria Claudia Silva; Rangel, Maria Cristina; Kampke, Edmar Hell (2015). "Um Algoritmo GRASP com Cadeia de Kempe Aplicado ao Problema de Tabela-horário para Universidades". Em: *XLVII SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, pp. 2643–2654.